

บททดลองที่ 2 การทดลองพีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)
2. เพื่อศึกษาทฤษฎีของเดอมอร์แกน (De Morgan)
3. เพื่อศึกษาวิธีการออกแบบวงจรคอมบินชันลอจิก (Combination Logic) โดยใช้พีชคณิตบูลีนช่วยในการแก้ปัญหา

ทฤษฎีย่อ

ในงานทางด้านดิจิทัลโดยส่วนใหญ่ เราต้องนำวงจรเกทต่าง ๆ มาประกอบกันเข้าเป็นวงจรลอจิกรวม (Combination Logic) เพื่อจะนำไปประยุกต์ใช้งานให้ได้ประโยชน์สูงสุด เช่น เรานำเกทต่าง ๆ มาประกอบกันเป็นวงจรรนับ (Counter), วงจรเข้ารหัส (Encoder), วงจรถอดรหัส (Decoder) ฯลฯ ซึ่งวงจรที่ประกอบขึ้นมาจากเกทต่าง ๆ เหล่านี้จะถูกนำมาประกอบรวมเป็นวงจรขนาดใหญ่เพื่อใช้งานด้านวิศวกรรม และงานทางด้านควบคุม เช่น การควบคุมความเร็วมอเตอร์ การควบคุมระบบแสงสว่าง ในอาคาร และงานด้านไมโครโปรเซสเซอร์ เป็นต้น

ดังนั้นในการออกแบบวงจรลอจิกใด ๆ ก็ตามเราจำเป็นต้องลดรูป Function นั้น ๆ ให้มีรูปแบบที่กะทัดรัดที่สุดเสียก่อน ทั้งนี้เพื่อวัตถุประสงค์ในความประหยัดไม่ว่าจะเป็นทางด้านค่าใช้จ่าย อีกทั้งยังช่วยลดความยุ่งยากในการออกแบบและความยุ่งยากในการผลิตในเชิงอุตสาหกรรม ข้อสำคัญอีกประการหนึ่งคือ ลดเวลาหน่วง (Delay Time) ให้น้อยที่สุดเสียก่อน เพื่อให้วงจรที่ออกแบบมีประสิทธิภาพในการใช้งานได้สูงสุด ดังนั้น Function ที่ยืดเยื้อเราจำเป็นต้องลดรูปให้สั้นลง ซึ่งเทคนิคการลดรูปวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายก็คือ ทฤษฎีของบูลีน (Boolean Algebra)

Boolean algebra theorems

1. กฎการสลับที่ (Commutative law)
 - a) $A + B = B + A$
 - b) $A \bullet B = B \bullet A$
2. กฎการจัดหมู่ (Associative law)
 - a) $(A + B) + C = A + (B + C)$
 - b) $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$
3. กฎการกระจาย (Distributive law)
 - a) $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$
 - b) $A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$
4. กฎเอกลักษณ์ (Idempotent law)
 - a) $A + A = A$
 - b) $A \bullet A = A$
5. กฎการนิเสธ (Complementary law)
 - a) $\overline{\overline{A}} = A$
 - b) $\overline{\overline{A}} = A$ (Involution law)

6. กฎแห่งการฟุ่มเฟือย (Redundant law)

a) $0 + A = A$

(Principle of duality)

c) $0 \bullet A = 0$

(Absorption law)

e) $A + \bar{A} \bullet B = \bar{A} + B$

g) $A + A \bullet B = A$

b) $1 + A = 1$

d) $1 \bullet A = 1$

f) $A \bullet (\bar{A} + B) = A \bullet \bar{B}$

h) $A \bullet (A + B) = A$

Proof 6(e) เราจะพิสูจน์ $A + \bar{A} \bullet B = A + B$,

$$\begin{aligned} A + B &= (A + B)(A + \bar{A}) \\ &= AA + A\bar{A} + AB + \bar{A}B \\ &= A + AB + \bar{A}B \\ &= A(1 + B) + \bar{A}B \\ &= A + \bar{A}B \end{aligned}$$

7. ทฤษฎีของเดอมอร์แกน (De-Morgan's Law)

a) $\overline{A + B} = \bar{A} \bullet \bar{B}$

b) $\overline{A \bullet B} = \bar{A} + \bar{B}$

Proof 7(a) เราพิสูจน์ว่า $(A + B)$ เป็น complement ของ $\bar{A}\bar{B}$ โดยแสดงว่าให้เห็นว่า $(A + B) + \bar{A}\bar{B} = 1$ และ $(A + B) \bullet \bar{A}\bar{B} = 0$ (ซึ่งแสดงว่า $(A + B)$ และ $\bar{A}\bar{B}$ ต้องเป็น Complement ของกันและกัน, ดูคำถามท้ายบท)

$$\begin{aligned} (A + B) + \bar{A}\bar{B} &= ((A + B) + \bar{A}) \bullet ((A + B) + \bar{B}) \\ &= (B + (A + \bar{A})) \bullet (A + (B + \bar{B})) \\ &= (B + 1) \bullet (A + 1) \\ &= (1)(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A + B) \bullet \bar{A}\bar{B} &= A\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B\bar{B} \\ &= 0 \bullet \bar{B} + \bar{A} \bullet 0 \\ &= (0)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

กรณี 7(b) ก็สามารถพิสูจน์ได้ในลักษณะเดียวกัน

อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง

- แผงทดลองวงจรดิจิทัล
- LED 2 ดวง
- IC 7400, 7402, 7404, 7408, 7410, 7432

การทดลอง

1. การทดลองพิสูจน์กฎของเดอมอร์แกน (De-Morgan's Law)

- ทำการต่อวงจรตามรูปที่ 2.1 และ 2.2 ตามลำดับ
- ด้าน Input ป้อนระดับแรงดันลอจิกด้วยลอจิกสวิตช์ และทำการตรวจสอบสถานะลอจิกของ Output ด้วย LED จากนั้นนำผลการทดลองที่ได้บันทึกลงในตารางที่ 2.1 และ 2.2
- เปรียบเทียบ Output x และ y ของแต่ละวงจรว่าเหมือนกันหรือไม่

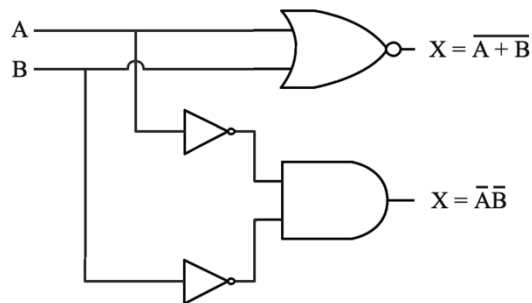


Figure 2.1 วงจรพิสูจน์ $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

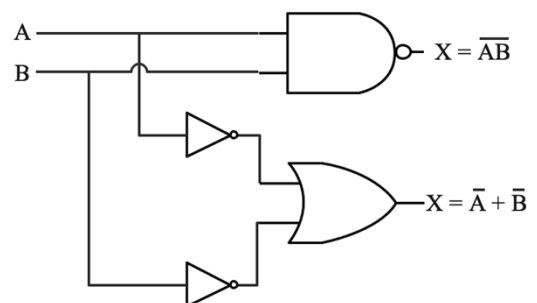


Figure 2.2 วงจรพิสูจน์ $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

Input		Output	
A	B	$X = \overline{A + B}$	$Y = \bar{A} \cdot \bar{B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Table 2.1

Input		Output	
A	B	$X = \overline{A \cdot B}$	$Y = \bar{A} + \bar{B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Table 2.2

2. การทดลองการลดรูปโดยใช้พีชคณิตบูลีน

พิสูจน์ว่า $\overline{(AB + ((\bar{A} + B) \bullet C))}$ โดยใช้วิธีการของพีชคณิตบูลีนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \overline{(AB + ((\bar{A} + B) \bullet C))} &= \overline{(AB)} \bullet \overline{((\bar{A} + B) \bullet C)} && \text{(De-Morgan's 7(a))} \\ &= (\bar{A} \bullet \bar{B}) \bullet (\bar{A} + B) \bullet \bar{C} && \text{(De-Morgan's 7(b))} \\ &= (\bar{A} + B\bar{B}) \bullet \bar{C} && (3(b)) \\ &= \bar{A}C \end{aligned}$$

- ให้ทำการวาดวงจรพิสูจน์ $\overline{(AB + ((\bar{A} + B) \bullet C))} = \bar{A}C$ ลงในรูปที่ 2.3
- ด้าน Input ให้ป้อนลอจิกโดยใช้ลอจิกสวิตช์ และนำผลการทดลองที่ได้บันทึกลงในตารางที่ 2.3
- ทำการเปรียบเทียบ Output ทั้งสองที่ได้ ว่าเหมือนกันหรือไม่

Figure 2.3 วงจรพิสูจน์ $\overline{(AB + ((\bar{A} + B) \bullet C))} = \bar{A}C$

Input			Output	
A	B	C	$X = \overline{(AB + ((\bar{A} + B) \bullet C))}$	$Y = \bar{A}C$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Table 2.3

3. การทดลองการลดรูป Function โดยใช้แผนภาพคาร์นอห์ (Karnaugh Map) ส่วนที่ 1

- แผนภาพคาร์นอห์ในรูปที่ 2.4 เป็นแผนภาพของวงจรคอมบิเนชันลอจิก (Combination Logic) ที่มี Input เป็นรหัส BCD และจะให้ Output เป็น 1 ก็ต่อเมื่อ Input ทารด้วย 3 ลงตัว (ยกเว้น 0) ดังนั้นเราจะได้ Function ของ Output คือ $Y = \sum m(3, 6, 9) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$ เราสามารถลดรูป Function ของ Output ได้โดยใช้ Karnaugh Map ดังต่อไปนี้
- ให้นักศึกษาหาสมการลดรูปจากแผนภาพคาร์นอห์
- ให้นักศึกษาวาดและต่อวงจรจากสมการลดรูปที่หาได้
- Bonus: ให้นักศึกษาออกแบบวงจรโดยใช้ IC เพียงสองตัว

AB\CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

รูปที่ 2.4 แผนภาพ K-Map ของวงจร

สมการของ K-Map _____

รูปวงจรที่ได้จากสมการของ K-Map

- นำผลการทดลองที่ได้บันทึกลงในตารางที่ 2.4

Input (BCD)				Output
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>Y</i>
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	

Table 2.4

Bonus:

4. การทดลองการลดรูป Function โดยใช้แผนภาพคาร์นอท์ (Karnaugh Map) ส่วนที่ 2

- ให้นักศึกษาทำการลดรูปวงจรที่กำหนดให้ (รูปที่ 2.5) และต่อวงจรรูปที่ 2.5 กับวงจรที่ได้ลดรูป ทำการทดลองและบันทึกผลที่ได้ลงในตารางที่ 2.5

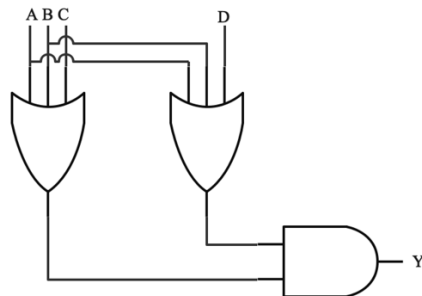


Figure 2.5

วงจรที่ลดรูป

Input				Output	
A	B	C	D	Y	Y'
0	0	0	0		
0	0	0	1		
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		

Table 2.5